Cohomologie du groupe linéaire à coefficients dans les polynômes de matrices

Antoine Touzé

Cohomologie du groupe linéaire à coefficients dans les polynômes de matrices

Antoine Touzé

Résumé

We compute bifunctors cohomology for matrix polynomials under conjugation and detect candidates for universal classes in higher invariant theory.

1 Introduction

Depuis une douzaine d'années, la cohomologie des foncteurs a permis de nombreux calculs et applications [6, 5, 2], parmi lesquelles la démontration [6] de l'engendrement fini de l'algèbre de cohomologie des schémas en groupes finis. Dans [4], Franjou et Friedlander entament l'étude de la cohomologie $H^*_{\mathcal{P}}(GL, B)$ des bifoncteurs B strictement polynomiaux. Cet article étend les premiers calculs effectués dans [4].

Nos résultats peuvent servir de base pour d'autres calculs et laissent également entrevoir de nombreuses applications. Ainsi, la cohomologie d'un bifoncteur B homogène de degré (b, b) calcule [4, Th 1.5] la cohomologie rationnelle de GL_n à coefficients dans $B(k^n, k^n)$ pour $n \geq b$:

$$H^*_{\mathcal{P}}(GL, B) \simeq H^*_{\mathrm{rat}}(GL_n, B(k^n, k^n)) \ .$$

La cohomologie des bifoncteurs calcule également [4, Th 8.2] la cohomologie stable des groupes discrets $GL_n(k)$ sur un corps fini k. Comme il est noté dans [3] et [4, section 8], c'est là un premier pas vers la K-théorie de l'anneau des nombres duaux et de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Théorème 1.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $p > 0$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une partition de poids d. La série de Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu_1 (r)}gl \otimes \cdots \otimes S^{\mu_n (r)}gl)$ est égale à la série de Poincaré des coinvarariants de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ sous l'action du sous-groupe $\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_n}$ de $\mathfrak{S}_d$.*

Ce théorème n'était auparavant connu que pour $d < p$ [4, prop 4.1] et pour $d = p = 2$ [4, Th 5.1]. Il donne un résultat aisément calculable à partir du $\mathfrak{S}_d$-module $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ qui est explicitement décrit dans [4, Th 1.8]. En particulier, $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$ est nulle en degrés impairs.

Si l'on veut étendre les résultats de [6, §1], van der Kallen explique dans [8] l'intérêt d'obtenir des classes pour les coefficients en puissances divisées de gl.

Proposition 1.2 *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p. La série de Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \Gamma^{p(r)}gl)$ se déduit de celle de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{p(r)}gl)$ en ajoutant $(t^{2p-2} - 1)\frac{1-t^{2p^{r+1}}}{1-t^{2p}}$.*

En particulier, la série de Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL,\Gamma^{p(r)}gl)$ est nulle en degrés impairs et elle a même caractéristique d'Euler-Poincaré que celle de $S^{p(r)}gl$. C'est en fait une conséquence de phénomènes de dualité généraux qui impliquent notamment le :

Théorème 1.3 *Soit F un foncteur strictement polynomial et $F^\sharp$ son dual de Kuhn. La caractéristique d'Euler-Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL,Fgl)$ est égale à celle de $H^*_{\mathcal{P}}(GL,F^\sharp gl)$.*

D'autres résultats donnant une description partielle de $H^*_{\mathcal{P}}(GL,\Gamma^{n(r)}gl)$ peuvent être obtenus à partir de notre connaissance de la cohomologie de $S^{n(r)}gl$. Par exemple :

Proposition 1.4 *Le degré maximal de la cohomologie de $\Gamma^{p^k(r)}gl$ est $p^k(2p^r-2)+2p^k-2$.*

La démonstration du théorème 1.1 occupe la deuxième partie de cet article. Elle repose sur un résultat de théorie des représentations [1], un calcul d' Ext dans la catégorie $\mathcal{P}$ [2] et un argument de changement de corps. Pour plus de clarté, le détail de cet argument est isolé dans la troisième partie.

2 Calcul de la série de Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL,S^{\mu(r)}gl)$

Nous utilisons les notations suivantes. Si $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ est une partition et E^* un foncteur exponentiel, E^μ désigne le foncteur $E^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes E^{\mu_n}$. Si A et B sont des foncteurs polynomiaux stricts, on note $\mathcal{H}om(A,B)$ le bifoncteur polynomial strict $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A(-_1),B(-_2))$. Les bifoncteurs de ce type sont dits séparables et [4, prop 2.2] donne un isomorphisme naturel : $H^*_{\mathcal{P}}(GL,\mathcal{H}om(A,B))\simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(A,B)$.

Le calcul se déroule en deux étapes. La première repose sur une construction d'Akin, Buchsbaum et Weyman [1, Th III.1.4 p. 244-245] que nous reformulons ici en termes de bifoncteurs :

Théorème 2.1 *Soit k un entier. L'ordre lexicographique sur les partitions de poids k induit une filtration de S^kgl par des bifoncteurs strictement polynomiaux :*

$$0\subseteq M_{(k)}\subseteq M_{(k-1,1)}\subseteq\cdots\subseteq M_{(1,\dots,1)}=S^kgl$$

Le premier terme $M_{(k)}$ est isomorphe à $\mathcal{H}om(\Lambda^k,\Lambda^k)$, et si λ est une partition et $\dot\lambda$ la suivante pour l'odre lexicographique on a une suite exacte courte :

$$M_{\dot\lambda}\hookrightarrow M_\lambda\twoheadrightarrow \mathcal{H}om(W_\lambda,S_\lambda)\ .$$

La cohomologie du gradué de cette filtration est bien connue [2, Th 6.1]. En particulier, si $S_{\lambda/\lambda'}$ (resp. $W_{\lambda/\lambda'}$) désigne le foncteur de Schur (resp. de Weyl) associé au diagramme gauche λ/λ', la cohomologie du bifoncteur $\mathcal{H}om({W_{\lambda/\lambda'}}^{(r)},S^{(r)}_{\lambda/\lambda'})$ est nulle en degré impair. En conséquence, toutes les suites exactes courtes associées à la filtration de $S^{k(r)}gl$ scindent en cohomologie. La cohomologie de $S^{k(r)}gl$ est donc isomorphe à la cohomologie du gradué de sa filtration.

Si μ est une partition, la cohomologie de $S^{\mu(r)}gl$ se calcule de manière similaire : le produit tensoriel des filtrations des $S^{\mu_i}gl$ donne une filtration de $S^{\mu}gl$ qui scinde en cohomologie. Pour exprimer le résultat de façon concise, on note $(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)$ le diagramme gauche tel que $S_{(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)} = S_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes S_{\lambda_n}$.

Proposition 2.2 *Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une partition de poids d. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :*

$$H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl) \simeq \bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \dots |\lambda_n|=\mu_n} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(W^{(r)}_{(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)}, S^{(r)}_{(\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n)})$$

Remarque 1 Si la caractéristique p est grande, l'isomorphisme de la proposition peut s'obtenir directement en observant que la filtration scinde. En effet, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une partition de poids $k < p$, l'application structurelle $\Lambda^{\lambda} \twoheadrightarrow S_{\lambda}$ admet une section b_{λ}. En notant $m : \otimes^k \twoheadrightarrow S^k$ le produit et $\Delta : \Lambda^{\lambda} \hookrightarrow \otimes^k$ le coproduit, on peut alors définir ϕ_{λ} comme la composée :

$$\mathcal{H}om(W_{\lambda}, S_{\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{H}om(b^{\sharp}_{\lambda}, b_{\lambda})} \mathcal{H}om(\Lambda^{\lambda}, \Lambda^{\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{H}om(\Delta^{\sharp}, \Delta)} gl^{\otimes k} \xrightarrow{\frac{m}{\lambda_1! \dots \lambda_j!}} S^k gl \; .$$

L'examen de la construction d'Akin Buchsbaum et Weyman montre alors que $\oplus \phi_{\lambda} : \oplus \mathcal{H}om(W_{\lambda}, S_{\lambda}) \to S^k gl$ est un isomorphisme.

Dans la suite, on note Δ^* le foncteur qui à un $\mathfrak{S}_d$-bimodule M associe le $\mathfrak{S}_d$-module à gauche obtenu par restriction de l'action de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d^{\mathrm{op}}$ au sous-groupe $\mathfrak{S}_d = \{(\sigma, \sigma^{-1})\} \subset \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d^{\mathrm{op}}$. Si f est un foncteur des $\mathfrak{S}_d$-modules à gauche vers les R-modules et M est un $\mathfrak{S}_d$-bimodule, on note Mf (resp fM) le $\mathfrak{S}_d$-module à gauche (resp. à droite) obtenu en appliquant f à la structure de droite (resp. de gauche).

La proposition 2.2 et [2, Th.6.1] donnent une description de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$ à partir du $\mathfrak{S}_d$-bimodule $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ décrit dans [4, Th.1.8] et [2, p.780] :

$$H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl) \simeq \bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \dots |\lambda_n|=\mu_n} \Big(s_{(\lambda_1|\dots|\lambda_n)} \, H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)\Big) \, s_{(\lambda_1|\dots|\lambda_n)} \; .$$

La deuxième étape de la démonstration consiste à simplifier cette expression. Pour cela, on peut tout d'abord supposer qu'on travaille sur un corps de base $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{F}_p$ d'après [4, Prop 3.1]. De plus, on remarque que $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ est une somme directe de bimodules élémentaires dans le sens suivant :

Définition 2.3 *Soit R un anneau. On appelle bimodule élémentaire sur R un R-module de la forme : $R\mathfrak{S}_d/\mathfrak{S}_\gamma \otimes R\mathfrak{S}_d$ avec $\mathfrak{S}_\gamma$ un sous-groupe de Young, muni de la structure de bimodule donnée par l'action suivante sur la base :*

$$\lambda.e_{[\tau]} \otimes e_\sigma.\mu = e_{[\lambda.\tau]} \otimes e_{\lambda.\sigma.\mu} \ .$$

Lorsque p est assez grand ($p > d$), on dispose d'une deuxième description de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$. En effet la multiplication $m : \otimes^d gl \to S^\mu gl$ induit un isomorphisme de $s^\mu \Delta^* \, H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ vers $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$. Utilisons les notations de la remarque 1. D'après [2, Th 6.1], l'isomorphisme $\oplus \phi_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\lambda_n}$ induit une transformation naturelle :

$$\bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \ldots |\lambda_n|=\mu_n} (s_{(\lambda_1|\ldots|\lambda_n)} -) \, s_{(\lambda_1|\ldots|\lambda_n)} \to s^\mu \Delta^*$$

dont l'évaluation sur le $\mathfrak{S}_d$-bimodule $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\otimes^{d(1)}, \otimes^{d(1)})$ est un isomorphisme. Ce bimodule contient tous les bimodules élémentaires comme facteurs directs et on en déduit donc une égalité valable pour tout bimodule élémentaire M lorsque la caractéristique p est assez grande :

$$\dim s^\mu \Delta^* \, M = \dim \bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \ldots |\lambda_n|=\mu_n} (s_{(\lambda_1|\ldots|\lambda_n)} M) s_{(\lambda_1|\ldots|\lambda_n)} \qquad (*)$$

Mais la dimension de $s^\mu \Delta^* \, M$ est indépendante de la caractéristique, et d'après la proposition 3.5, il en va de même pour la dimension des $(s_\mu M)s_\lambda$. Ainsi, l'égalité $(*)$ est en fait valable en toute caractéristique.

Le théorème découle maintenant du fait que $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ est une somme directe de bimodules élémentaires.

3 Changement de base pour les bimodules élémentaires

Lemme 3.1 *Soit M un bimodule élémentaire sur $\mathbb{F}_p$ et μ et λ deux diagrammes gauches. Les applications naturelles : $(s_\mu M)_{\mathfrak{S}_\lambda} \to s_\mu(M_{\mathfrak{S}_\lambda})$ et $s_\mu(M^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \to (s_\mu M)^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Nous démontrons le premier isomorphisme. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(s_\mu M)_{\mathfrak{S}_\lambda} \arrow[r, "(1)"] & s_\mu(M_{\mathfrak{S}_\lambda}) \\
({}^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\mu} M)_{\mathfrak{S}_\lambda} \arrow[r, "(2)"] \arrow[u] & {}^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\mu}(M_{\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

La flèche (2) est un isomorphisme car les actions sont définies sur une base de M. Par conséquent, (1) est surjective. On peut conclure car la source et le but de (1) ont la même dimension d'après [2, Th 6.1].

Définition 3.2 *Soit M un $\mathfrak{S}_d$-bimodule et λ et μ des diagrammes gauches. On définit $s_\mu M s_\lambda$ comme l'image de l'application composée :*

$$ {}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}(M^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \hookrightarrow M \twoheadrightarrow ({}_{\mathfrak{S}_{\tilde\mu}}M)_{\mathfrak{S}_{\tilde\lambda}} \,. $$

Lemme 3.3 *Soit M un bimodule élémentaire sur $\mathbb{Z}$ et λ et μ des diagrammes gauches. On a :*

$$ \dim\left(s_\mu\left(\mathbb{F}_p\otimes M\right)\right)s_\lambda \leq \operatorname{rank} s_\mu M s_\lambda $$

De plus, l'inégalité est en fait une égalité si p est assez grand.

Démonstration. Notons $M_{\mathbb{F}_p}$ le bimodule élémentaire $M\otimes\mathbb{F}_p$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}(M_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & s_\mu(M_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & (s_\mu M_{\mathbb{F}_p})^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & (s_\mu M_{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{S}_{\tilde\lambda}} \arrow[d, "i_{\mathfrak{S}_{\tilde\lambda}}"] \\
M_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, two heads] & {}_{\mathfrak{S}_{\tilde\mu}}M_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, "="] & {}_{\mathfrak{S}_{\tilde\mu}}M_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, two heads] & ({}_{\mathfrak{S}_{\tilde\mu}}M_{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{S}_{\tilde\lambda}}
\end{tikzcd}$$

On vérifie que $i_{\mathfrak{S}_{\tilde\lambda}}$ est injective. Une chasse dans le diagramme montre alors que $s_\mu M_{\mathbb{F}_p} s_\lambda = \left(s_\mu M_{\mathbb{F}_p}\right) s_\lambda$.

Regardons maintenant le diagramme de $\mathbb{Z}$-modules dont les flèches verticales sont des surjections induites par la réduction modulo p : $M \twoheadrightarrow M_{\mathbb{F}_p}$:

$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}(M^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & ({}_{\mathfrak{S}_{\tilde\mu}}M)_{\mathfrak{S}_{\tilde\lambda}} \arrow[d, two heads] \\
{}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}(M_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[r, hook] & M_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, two heads] & ({}_{\mathfrak{S}_{\tilde\mu}}M_{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{S}_{\tilde\lambda}}
\end{tikzcd}$$

Puisque $({}_{\mathfrak{S}_{\tilde\mu}}M)_{\mathfrak{S}_{\tilde\lambda}}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre, il en va de même pour $s_\mu M s_\lambda$ et on en déduit le résultat.

Lemme 3.4 *Soient λ et μ des diagrammes gauches et k un entier. La dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(W_\mu\circ kI, S_\lambda)$ ne dépend pas du corps.*

Démonstration. Grâce à [1, Th.II.2.16 et II.3.16], les foncteurs de Schur S_λ et de Weyl W_μ sont en fait des foncteurs polynomiaux stricts sur $\mathbb{Z}$ au sens de [7, section 2]. En copiant la démonstration de [7, Prop.2.8], on montre que le foncteur $S_\lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$ (resp. $W_\mu\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$) obtenu par changement de base n'est autre que le foncteur de Schur (resp. Weyl) défini sur $\mathbb{F}_p$. On utilise alors [7, Prop.2.6] pour conclure.

Proposition 3.5 *Soient λ, μ des diagrammes gauches de poids d. Pour tout bimodule élémentaire $M=\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\gamma\otimes\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ la dimension de $(s_\mu M)s_\lambda$ ne dépend pas de p.*

Démonstration. Les démonstrations de [2, Th.4.4 et Th 6.1] montrent l'égalité suivante, valable pour tout entier k et tout nombre premier p :

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}(W_\mu \circ kI, S_\lambda) = \dim \Big(s_\mu \,\mathrm{Hom}_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}((kI)^{\otimes d}, \otimes^d)\Big)\, s_\lambda \qquad (*)$$

Soit p et q des nombres premiers, avec q suffisamment grand pour que l'inégalité du lemme 3.3 soit une égalité pour tout $\mathfrak{S}_d$-bimodule élémentaire. (Ceci est possible car il n'y en a qu'un nombre fini à isomorphisme près). Alors pour tout bimodule élémentaire M sur $\mathbb{Z}$ on a l'inégalité :

$$\dim(s_\mu\,(M \otimes \mathbb{F}_p))s_\lambda \leq \dim(s_\mu(M \otimes \mathbb{F}_q))s_\lambda\ .$$

Mais $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}((dI)^{\otimes d}, \otimes^d)$ contient tous les bimodules élémentaires comme facteurs directs. En conséquence, $(*)$ et le lemme 3.4 montrent que l'inégalité précédente est en fait une égalité, ce qui achève la démonstration.

Références

[1] K. Akin, D.A. Buchsbaum, J.Weyman, Schur functors and Schur complexes, Adv. in Math. 44(3) (1982) 207–278.

[2] M. Chalupnik, Extensions of strict polynomial functors, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38(5) (2005) 773–792.

[3] L. Evens, E.M. Friedlander, On $K^*(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ and related homolgy groups, Trans. A.M.S. 270 (1982) 1–46.

[4] V. Franjou, E.M. Friedlander, Cohomology of Bifunctors, (2005)

[5] V. Franjou, E.M. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, General linear and functor cohomology over finite fields, Ann. of Math. 150(2) (1999) 663–728.

[6] E.M. Friedlander, A. Suslin, Cohomology of finite group scheme over a field, Invent. Math. 127 (1997) 235–253.

[7] A. Suslin, E.M. Friedlander, C.P. Bendel, Infinitesimal 1-parameter subgroups and cohomology, J. Amer. Math. Soc. 10(3) (1997) 693–728.

[8] van der Kallen, W., Cohomology with Grosshans graded coefficients. Invariant theory in all characteristics, 127–138, CRM Proc. Lecture Notes, 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI,2004.